

DİJKSTRA ALGORİTMASI İLE EN KISA ROTANIN HESAPLANMASI¹

Bekir Cevizci²

ÖZ

Dijkstra algoritması, bir başlangıç noktasından grafikte bulunan herhangi bir başka noktaya gitmek için gereken en kısa rotayı belirleyen bir algoritmadır. Bu makalede, Dijkstra algoritması kullanılarak Ege Bölgesi'nde bulunan iller arasında rota oluşturmayı içeren bir etkinliğin uygulanma süreci ve sonuçları paylaşılmaktadır. Etkinlik, matematiksel modelleme süreci (gerçek yaşam problemi, matematiksel problem, matematiksel çözüm, çözümü gerçek yaşama uyarlama) takip edilerek uygulanmıştır. Uygulama sınıfı, bir Bilim Sanat Merkezi'ne devam eden 15 ortaokul öğrencisinden oluşmuştur. Öğrenciler, ders süresince derse ilgili olmuşlar, soruları ve problemi çözmek için çaba harcamışlardır. Öğrencilerin genel olarak algoritmayı başarı ile uyguladıkları ve problem çözme sürecini de başarı ile tamamladıkları söylenebilir. Bu uygulamada tespit edilen bazı öğrenci zorluk ve hataları (dikkatsizlik hataları, düğümlerin değerini bulduğu halde rota çizmeme gibi) dikkate alınarak gelecek uygulamalar planlanabilir.

Anahtar kelimeler: Dijkstra algoritması, matematiksel modelleme, üstün yetenekli öğrenciler.

CALCULATING THE SHORTEST PATH USING DIJKSTRA'S ALGORITHM

ABSTRACT

The Dijkstra's algorithm is an algorithm that determines the shortest paths needed to go from a starting node to any node in a graph. In this article, the process and results of an activity that included route formation among the provinces in the Aegean region using Dijkstra's algorithm are shared. The activity was designed based on a mathematical modeling process (real life problem, mathematical problem, mathematical solution, interpreting the solution). The activity was implemented with 15 middle school students attending a Science and Art Center. The students actively participated in the activity and throughout the lesson they tried to solve the problem. The students successfully implemented the algorithm and completed the problem solving process. Future applications of this activity can be planned by taking into account some student difficulties (e.g., simple errors, not drawing the route although the value of nodes are calculated correctly) observed in this application.

Keywords: Dijkstra's algorithm, mathematical modeling, gifted students.

Makale Hakkında:

Gönderim Tarihi: 19.02.2018

Kabul Tarihi: 12.07.2018

Elektronik Yayın Tarihi: 29.10.2018

¹ Bu etkinlik 1689B011716661 numaralı TÜBİTAK projesi kapsamında geliştirilmiştir.

² Okul Müdürü, Muğla Bilim Sanat Merkezi, bekircevizci@gmail.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2066-2971>

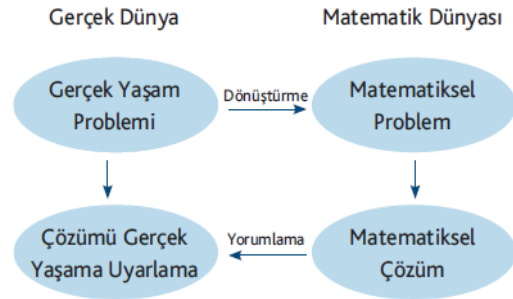
GİRİŞ

Haritacılıkta önemli problemlerden birisi iki nokta arasındaki en kısa rotanın belirlenmesidir. Bu alandaki gelişmelere önemli katkı yapan bilim insanları arasında Hollandalı matematikçi ve bilgisayar bilimci Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002) yer almaktadır (Apt, 2002). Edsger Wybe Dijkstra, kendi adıyla anılan Dijkstra algoritmasını geliştirmiştir. Dijkstra algoritması, bir başlangıç noktasından hedef noktaya gidilebilecek en kısa rotayı hesaplamaktadır. Aslında, Dijkstra algoritması sadece başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki en kısa rotayı değil, başlangıç noktasından haritada bulunan diğer noktalara gitmek için gereken en kısa rotaları da belirlemektedir. Günümüzde navigasyon cihazlarında veya web sayfalarında kullanılan harita uygulamalarının çoğu bu algorithmadan yararlanılarak tasarlanmıştır (Finding the Shortest Path, 2016). Dijkstra algoritmasının haritacılık dışında da birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Örneğin, biyolojide bazı hastalıkların yayılma sürecini anlamak, şehircilikte kablo döşemesinin planlanması gibi alanlarda da uygulamaları vardır. Bu makalede, Dijkstra algoritması kullanılarak Ege Bölgesi'nde bulunan iller arasında rota oluşturmayı içeren bir etkinliğin uygulanma süreci ve sonuçları paylaşılmaktadır.

Etkinliğin matematiksel açıdan odak konusu algorithmadır. Algoritma, bir problemi çözmek amacıyla, sınırlı sayıda yönergelerden oluşan işlem listesi şeklinde tanımlanmaktadır (Levitin, 2012). Yönergeler, açık, net ve anlaşılır olmalıdır. Algoritmik düşünme, matematik, bilgisayar bilimi, fen bilimleri, sosyal bilimler ve dil bilgisi derslerinde gerekli olan ortak düşünme biçimlerinden birisidir (Barr & Stephenson, 2011). Bu nedenle öğrencilere küçük sınıflardan itibaren genellenebilir stratejiler oluşturmaları için fırsatlar verilmelidir. Ayrıca, öğrenciler standart algortimalarla tanıştıkları zaman bu algortimaları anlamlandırabilecekleri etkinlikler yapmalıdırlar. Matematik dersi doğası gereği öğrencileri birçok algoritma (örn: çıkarma algortiması) ile tanıştırmaktadır. Öğrencilerin algortimaları anlamsız ve gereksiz kurallar olarak görmemeleri için, algortimaları tanıştırmamanın bir yolu problem çözme bağlamında olabilir. Bu yöntemle,

öğrencilerin akıl yürüterek yeni bilgiyi öğrenmelerine fırsat tanınabilir.

Bu makalede paylaşılan etkinlikte öğrencilerin problem çözmeleri hedeflenmiş ve etkinliğin yapısına uygun olarak matematiksel modelleme basamaklarından yararlanmaya karar verilmiştir. Matematiksel modelleme süreci; öğrencilerin akıl yürütmelerine, problem çözme becerilerinin gelişmesine ve matematiğin günlük yaşamda nasıl kullanıldığını görerek matematiğe değer vermelerine yardım edebilecek bir süreçtir (Doruk & Umay, 2011; Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013). Bu özelliklerinden dolayı son yıllarda önemi daha çok ortaya çıkan ve eğitimin tüm kademelerinde kullanılması tavsiye edilen matematiksel modelleme, günlük yaşamda karşılaşılan problemlerin matematiksel yöntemlerle incelenmesi olarak tanımlanabilir (Erbaş vd., 2014). Bu çalışmada Şekil 1'de verilen matematiksel modelleme süreci takip edilmiştir.



Şekil 1. Matematiksel Modelleme Süreci (MEB, 2013, s. V)

Matematiksel modelleme süreci günlük yaşamdan kaynaklanan otantik bir problem ile başlar (MEB, 2013). Öncelikle öğrencilerin problemi anlaması gerekmektedir. Öğrenciler problemi anlamlandırmak için verilenleri ve istenenleri belirleyebilirler, alt problemler oluşturabilirler veya problemi kendi cümleleri ile ifade edebilirler. İkinci aşamada, öğrenciler günlük yaşam problemini matematik dili ile ifade ederler ve bir matematiksel model oluştururlar. Üçüncü aşamada, oluşturulan matematiksel model kullanılarak problem çözülür. Son aşamada, matematiksel çözüm günlük yaşam problemi bağlamında yorumlanır. Tüm süreç döngüsel olup, problem çözme sürecinde edinilen yeni bilgilerle herhangi bir aşamada değişikliğe gidilebilir.

Bu çalışmada, öğrencilerin Dijkstra algoritmasını kullanmaları gereken bir problemi, matematiksel modelleme sürecini takip ederek çözmelerini desteklemek ve onların bu problem çözme sürecini incelemek amaçlanmıştır. Çalışmanın özgün yönlerinden birisi uygulama öğrencilerinin Bilim Sanat Merkezi'nde eğitim gören öğrenciler olmasıdır. Bilim Sanat Merkezleri [BİLSEM], öğrencilere okul dışı zamanlarda, onların örgün eğitimlerini aksatmayacak şekilde eğitim veren kurumlardır. Bu kurumların öğrencileri genel zihinsel yetenek, müzik ve resim alanlarında yapılan çeşitli sınavlarla belirlenir (MEB, 2016). Yıldız, Baltacı, Kurak ve Güven (2012) üstün yetenekli öğrencilerin problem çözme süreçlerini inceleyen çalışmaların az olduğunu belirtmişlerdir. Üstün yetenekli öğrencilerin ilk kez karşılaştıkları bir algoritmayı, problem çözme sürecinde nasıl kullandıklarını inceleyen bu çalışmanın, literatüre katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Ayrıca, gerek BİLSEM gerek örgün eğitim kurumlarında görev yapan matematik öğretmenlerinin yararlanabileceği bir matematiksel modelleme etkinliği paylaşarak öğrenci merkezli matematik öğretime katkıda bulunmak amaçlanmıştır.

Uygulama Sınıfı

Bu çalışma kapsamında geliştirilen etkinlik, Türkiye'nin güney batısında bulunan bir ilde yer alan bir Bilim Sanat Merkezi'nde uygulanmıştır. Bilim Sanat Merkezlerinde sınıf mevcutları küçük olup öğrencilerin dahil oldukları programa göre belirlenmektedir. Örneğin, destek eğitim programında sınıflar 4-10 öğrenciden oluşurken bireysel yetenekleri fark ettirme programında sınıflar 2-6 öğrenciden oluşmaktadır (MEB, 2016). Bu etkinlik uygulanırken o sırada okulda bulunan 15 öğrenci birleştirilmiştir. Bu öğrencilerin; bir tanesi (kız) beşinci sınıf, yedi tanesi (dört kız, üç erkek) altıncı sınıf, yedi tanesi (dört kız, üç erkek) ise yedinci sınıfta okumaktadır.

Etkinliğin uygulama süresi yaklaşık 1 saattir. Etkinlikte kullanılan materyaller çalışma kağıdı ve kalemidir. Çalışma kağıdı Ek 1'de verilmiştir. Etkinliğin hitap ettiği BİLSEM kazanımları şunlardır:

- Graft Kuramı'nı kullanarak verilen problem durumuna uygun çözüm geliştirir.

- Günlük hayatta karşılaşılan problemlere uygun problem çözme stratejilerini geliştirir.

Etkinlik, temel olarak bir matematiksel modelleme etkinliği olduğu için örgün eğitim kurumlarında da uygulanabilir. Matematiksel modelleme, matematik derslerinde geliştirilmesi gereken temel beceriler arasında yer almaktadır (MEB, 2013).

ETKİNLİĞİN UYGULANMASI

Algoritmanın Öğretilmesi

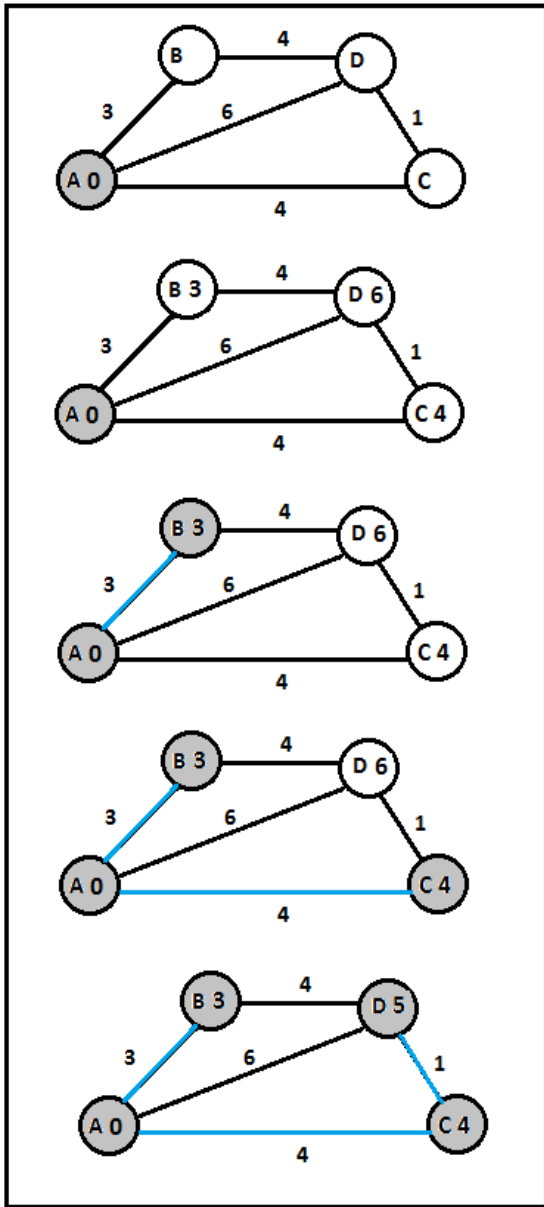
Dersin başında öğrencilere algoritma kavramının ne anlama geldiği sorulmuş ve öğrencilerden algoritmaya örnekler vermeleri istenmiştir. "Yapılması gereken işlemler listesi" şeklinde tanımlar yapılmış, verilen örnekler ise daha çok dört işlem ile ilgili olmuştur. Öğretmen, bilgisayarların algoritmalar kullanılarak programlandığını belirterek algortima öğrenmenin önemine dikkat çekmiştir. Öğrencilere bu derste bir algoritma öğrenecekleri söylenmiştir.

Öğrencilere, yolculuk yaparken navigasyon cihazı kullanıp kullanmadıkları sorulmuştur. Çoğu öğrenci navigasyon cihazını tanıdığını belirtmiştir. Bu cihazların en kısa yolu nasıl buluyor olabileceği sorulmuştur. Cihazlara yerleştirilen programlar sayesinde en kısa yolun hesaplanabildiği tartışılmıştır. Bu derste bir haritada, bir başlangıç noktasından diğer noktalara giden en kısa yolları veren bir algoritma öğrenecekleri belirtilmiştir. Dijkstra isimli bir matematikçi tarafından bulunduğu için Dijkstra algoritması adı ile anılan bir algoritmayı öğrenecekleri söylenmiştir.

Bu derste, Ege Bölgesindeki iller arasında en kısa rotayı hesaplamakla ilgili bir problem çözecekleri belirtilmiştir. Ancak, esas çözecekleri probleme geçmeden daha basit sorularla algoritmayı öğrenecekleri, daha basit soru çözenin aslında bir problem çözme yöntemi olduğu öğrencilere açıklanmıştır. Çalışma kağıtları (Ek 1) her öğrenciye bir tane olacak şekilde dağıtılmıştır. Öğretmen çalışma kağıdındaki ilk soruda bulunan şekli tahtaya çizmiştir. Matematikte *graf* isimli bir kavram olduğunu, bu kavramdan yararlanarak şehirlerin ve şehirler arasındaki yolların temsil edilebileceğini söylemiştir. Tahtadaki şeklin

bir graf örneği olduğunu, dairelerin *düğüm*, düğümleri birleştiren çizgilerin *kenar* olarak isimlendirildiğini belirtmiştir. Öğrenilen yeni kavramların anlamlandırılması için düğümler şehirlerle, kenarlar yollarla ilişkilendirilmiştir.

Bir öğrenci çalışma kağıdının başında yer alan Dijkstra algoritmasının adımlarını okumuştur. Öğrencilere, algoritmayı uygulamalı olarak öğrenecekleri, birinci soruyu birlikte çözecekleri belirtilmiştir. Soru-cevap tekniği ile öğrencilerin görüşleri alınarak birinci sorunun iki şıkkı da çözülmüştür. Burada örnek olması açısından b şıkkında yer alan sorunun çözümü sunulmaktadır. Şekil 2, Dijkstra algoritmasının bu sorudaki uygulamasını adım adım göstermektedir.



Şekil 2. Dijkstra Algoritmasının Uygulanması

Şekil 2’de verilen graf için amaç, A noktasından başlayan ve diğer noktalara giden en kısa rotaları belirlemektir. Çalışma kağıdındaki Dijkstra algoritmasının yönergeleri takip edilirse, ilk adımda başlangıç düğümü 0 değerini alır (düğümün üzerine değeri yazılır) ve gri renge boyanır (Şekil 2, graf 1).

İkinci yönergeye göre, A düğümüne direk bağlanan B, D ve C düğümleri, kendilerini A düğümüyle birleştiren kenarların değerini alırlar (Şekil 2, graf 2). En düşük değerli düğüm B düğümüdür. B düğümü yeni başlangıç düğümü olur ve gri renge boyanır. Bu düğümün rotası da boyanır (Şekil 2, graf 3).

Algoritmanın üçüncü yönergesine göre, B düğümüne bağlantısı olan düğümler belirlenir. Bunlar A ve D düğümleridir. A düğümü gri renkli olduğu için ihmal edilir. Değeri daha önce 6 olarak yazılan D düğümü, B düğümü ile olan komşuluğundan dolayı yeni bir değer alabilir. Bu yeni değer $3+4$ yani 7 olarak ortaya çıkmaktadır ancak algoritmanın dördüncü yönergesine göre küçük değerler tercih edildiğinden, D düğümünün değeri 6 olarak korunur. Yeni başlangıç düğümü değeri en küçük olan C düğümüdür, bu düğüm gri renge boyanır, rotası kesinleştirilir (Şekil 2, graf 4). Bir düğümün rotası, değerini aldığı rota kullanılarak kesinleştirilir.

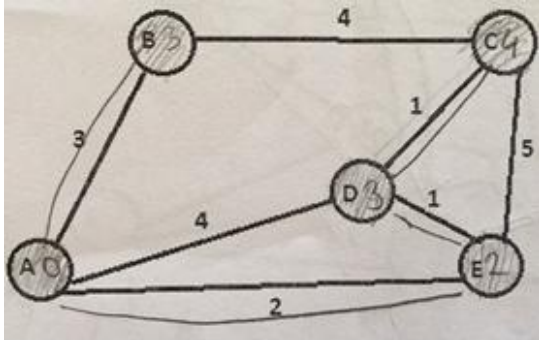
C düğümüne komşu olan ve değeri kesinleşmeyen bir düğüm kalmıştır: D düğümü. D düğümü, C düğümü ile olan komşuluğundan dolayı $4+1$ yani 5 değerini alır, çünkü 5 önceki değeri olan 6’dan küçüktür. D düğümü sıradaki en küçük değerli düğüm olduğu için (beyaz renkli sadece kendisi kaldı) gri rengi alır ve rotası kesinleştirilir (Şekil 2, graf 5). Algoritmanın beşinci yönergesine göre, tüm düğümler gri rengi aldığı için algoritma sonlandırılır. A düğümünden diğer düğümlere gitmekte kullanılabilecek en kısa rotalar belirlenmiştir.

Algoritmayı öğrenirken öğrenciler iki noktada zorlanmışlardır. Birincisi, kenar uzunluklarının orantısız olması ile ilgilidir. Birkaç öğrenci uzunlukları farklı olan kenarların nasıl aynı değere sahip olabildiğini sormuştur. Öğretmen bu soruyu tüm sınıfa yönlendirmiştir. Haritalar bağlamında düşünmelerini önermiştir. Bir öğrenci, gerçekte yolların kıvrımlı olduğunu, bu nedenle şehirler düz çizgi ile birleştirilince

olduklarından daha kısa göründüklerini belirtmiştir. Öğretmen öğrenciyi, “şeklin kuşbakışı çizildiğini düşünün” diyerek desteklemiştir.

Öğrencilerin zorlandıkları ikinci nokta, algoritmanın uygulama aşamasında sanki kenarlar üzerinde gerçekten yolculuk yapılıyor gibi düşünceleri olmuştur. Örneğin Şekil 2’de yer alan üçüncü grafta sıradaki düğüm C düğümüdür. Burada birçok öğrenci, B’den C’ye giden bir kenar olmadığını belirtmiş, C’ye nasıl gidebileceklerini sormuştur. Burada algoritmanın amacı hatırlatılmış, amacın A düğümünden diğer düğümlere giden en kısa rotaları belirlemek olduğu, B’den C’ye gitmenin bir amaç olmadığı söylenmiştir. Ayrıca, algoritmanın bir takım kurallar sonucu bize rota oluşturduğu, kurallar uygulanırken aslında bir yolculuk yapılmadığı belirtilmiştir.

Dersin ilerleyen kısmında, öğrencilerin algoritmayı kendilerinin uygulamasını sağlamak için ikinci soruyu çözmeleri istenmiştir. Bir öğrencinin yanıtı Şekil 3’te verilmiştir. Öğrenci, düğümlerin değerlerini doğru bir şekilde belirlemiş, A düğümünden diğer düğümlere giden en kısa rotaları çizmiştir.



Şekil 3. Bir Öğrencinin İkinci Soruya Yanıtı

İkinci soru yanıtlandıktan sonra öğrencilere neden bu algoritmanın en kısa rotaları ürettiği sorulmuştur. Algoritmanın sürekli en küçük değeri seçerek ilerlediği, bu nedenle de en kısa yolları bulduğu belirtilmiştir. Birçok öğrenci ikinci soruyu başarıyla tamamladığı için öğretmen, öğrencilerin algoritmanın nasıl çalıştığına dair temel bilgiye sahip olduklarını düşünmüş ve problem çözme aşamasına geçmeye karar vermiştir. Dersin bundan sonraki kısmı matematiksel modelleme basamakları çerçevesinde sunulmuştur.

Gerçek Yaşam Problemi

Dersten önce öğretmen problemi oluştururken şu hususlara dikkat etmiştir: 1) Problem öğrencilerin yakın çevresi ile ilgili olmalıdır. Bu durumun onların ilgilerini çekeceği düşünülmüştür. Bu nedenle uygulama okulunun bulunduğu Ege Bölgesi ile ilgili bir problem oluşturulmuştur. 2) Problemin gerçekçi ve otantik olmasına gayret edilmiştir. Bu sayede öğrencilerin matematiğin gerçek yaşamdaki yararını görmeleri amaçlanmıştır. Dijkstra algoritmasının gerçek yaşam uygulamalarından biri olan rota hesaplaması üzerine bir problem oluşturulmaya karar verilmiştir. Problemin gerçekçi olması bakımından, sadece haritaya bakarak görsel olarak (tahmin yöntemi ile veya olası tüm sonuçları listeleterek) rota oluşturulması zor olan bir il belirlenmiştir: Kütahya. Kütahya ili seramikleri ile ünlü olduğu için bu bağlamda bir problem yazılmıştır.

Derste, öğrencilerden birisi çalışma kağıdındaki problemi okumuştur. Problem şu şekildedir:

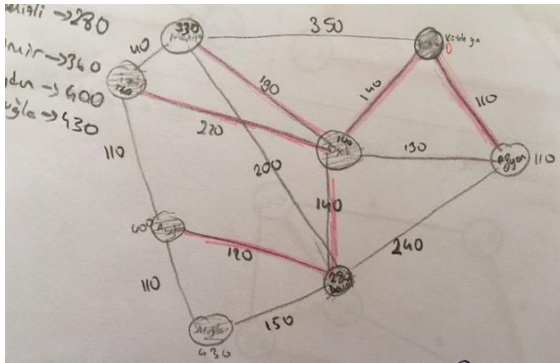
Kütahya, porseleni ile ünlü bir ilimizdir. Kütahya’da bulunan bir şirket, ürettiği porselen yemek takımlarını Ege Bölgesindeki diğer illere dağıtacaktır. Her ilin dağıtım kamyonu ayrıdır. Her bir kamyon için rota oluşturulması gerekmektedir. Kütahya’dan başlayan ve bölgedeki diğer yedi ile gitmekte kullanılabilecek en kısa mesafeli rotalar hangileridir? Model oluşturarak gösteriniz.

Bu aşamada öğrencilere problemin istenenleri ve verilenleri sorulmuştur. Problemin Kütahya’dan başlayan ve bölgedeki diğer yedi ile gitmekte kullanılabilecek en kısa mesafeli rotaları sorduğu vurgulanmıştır. Her ilin dağıtım kamyonunun ayrı olduğu hatırlatılmıştır. Problemin verilenleri arasında bir harita ve iller arası uzaklıklar olduğu paylaşılmıştır (Ek 1). Matematiksel modellemenin sonraki iki aşamasında öğrencilere serbest çalışma zamanı verilmiştir. Problemde belirtildiği üzere bir model oluşturmaları ve problemi çözmeleri söylenmiştir. Yanında oturan arkadaşlarıyla çözümlerini karşılıklı kontrol ederek ilerlemeleri belirtilmiştir.

Matematiksel Problem

Bu basamakta öğrencilerin gerçek yaşam problemine uygun bir graf oluşturarak problemi matematiksellemeleri beklenmektedir. Aslında, algoritmayı öğrenirken karşılaştıkları graflara göre çok daha karmaşık bir graf oluşturmaları gerekmektedir. Öğrencilerin çoğu başarıyla bu grafi oluşturmuştur. Öğrencilerin çalışma kağıtlarının kapsamlı bir değerlendirmesi “ölçme ve değerlendirme” bölümünde sunulmuştur.

Şekil 4’te bir öğrencinin oluşturduğu model örnek olarak verilmektedir. Bu öğrenci, illeri düğümlerle, iller arasındaki yolları kenarlarla temsil etmiştir. Kenarların değerini model üzerinde göstermiştir. Şehirler arası karayollarının uzaklıkları gerçek uzunlukların en yakın onluğa yuvarlanmış şeklidir. Şekil 4, ders bittikten sonra öğrencinin çalışma kağıdından elde edildiği için aslında öğrencinin çözümünü de göstermektedir. Öğrenci, rotaların çoğunu doğru bir şekilde bulmuştur.



Şekil 4. Bir Öğrencinin Oluşturduğu Matematiksel Model

Matematiksel Çözüm

Öğrenciler, matematiksel modeli (graf) oluşturduktan sonra Dijkstra algoritmasını uygulayarak problemi çözmüşlerdir. Öğretmen, grupların arasında dolaşarak takılan öğrencilere destek olmuştur. Bu aşamada, grafta çok sayı olduğu için bazı öğrencilerin dikkatsizlik sonucu rotayı yanlış yerden devam ettirdiği durumlar olmuştur. Bu durumların dikkatsizlik şeklinde adlandırılmasının nedeni, öğrenciler uyarıldıkları zaman hemen hatalarını düzeltmişler, kavramsal düzeyde bir bilgi eksikliği belirtisi göstermemişlerdir. Bazı öğrenciler ise ikili çalışmış, biri değerleri

okurken ve hesaplarken diğeri çizim yapmıştır. Problemin Dijkstra algoritması ile adım adım çözümü Ek 2’de verilmiştir.

Çözümü Gerçek Yaşama Uyarılama

Problemin çözümü tahtada paylaşıldıktan sonra, öğrencilere bu çözümün bize hangi bilgileri sağladığı sorulmuştur. Öğrenciler, bulunan rotaların, kamyonların Kütahya’dan diğer illere gitmekte kullanabileceği en kısa yolları gösterdiğini belirtmişlerdir. Öğrencilere gerçek yaşamda her zaman en kısa yolun mu tercih edildiği sorulmuştur. Trafik olması veya paralı yol bulunması durumunda daha uzun rotaların tercih edilebildiği paylaşılmıştır. Örneğin, en kısa yolda tüketilen benzin bazen trafik sebebiyle biraz daha uzun yola göre daha çok olabilir. Özet olarak, en kısa yolun ulaştırmada göz önünde bulunan kriterlerden birisi olduğu, ancak başka kriterlerin de değerlendirilmesi gerektiği tartışılmıştır.

Ölçme ve Değerlendirme

Öğrencilerin dersteki performansları, öğretmenin ders içi gözlemleri ve öğrencilerin çalışma kağıtları kullanılarak ölçülmüştür. Öğretmenin gözlemlerine göre öğrenciler ders boyunca derse ilgili olmuşlardır. Matematik derslerinde motivasyonu sağlamak her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle dersin katılımcılar için ilgi çekici olduğu söylenebilir. Ayrıca öğrencilerin tümü ders boyunca soruları ve problemi çözmek için çaba harcamışlardır. Bu durum dersin konusunun ve problemin düzeyinin öğrencilerin seviyesine uygun olduğunu göstermektedir. Zorlanan bazı öğrenciler olsa da pes edip dersi tamamen bırakan öğrenci olmamıştır.

Çalışma kağıdının ilk sorusu öğretmen rehberliğinde çözülmüştür. Bu nedenle bu soru değerlendirme kapsamına alınmamıştır. Çalışma kağıdında bulunan ikinci soru, problem ve değerlendirme sorusu öğrencileri değerlendirmek amacı ile kullanılmıştır. Bunlardan ikinci soru ile problemin çözümleri sınıfta paylaşılmıştır. Ancak öğrencilere yanıtları yanlışsa, yanıtlarını düzeltmeleri gibi bir hatırlatma yapılmamıştır. Problemin çözümünün paylaşımı dersin sonuna geldiği için düzeltmeye zaman da kalmamıştır çünkü sınıf tartışmasından sonra hemen değerlendirme sorusunu yapmaları istenmiştir.

Değerlendirme sorusunu teslim eden öğrenciler ders bittiği için sınıftan ayrılmışlardır. Bahsedilen her üç soru da Van de Walle, Karp, ve Bay-Williams (2013) çalışmasından uyarlanan ve Ek 3'te verilen dört dereceli puanlama anahtarı kullanılarak değerlendirilmiştir (Cevizci, 2018). Puanlama anahtarına göre sınıfın ikinci soru ve değerlendirme sorusundan aldığı puanlar Tablo 1'de, problemde aldığı puanlar Tablo 2'de sunulmuştur. Problem diğer iki sorudan farklı olarak model oluşturmayı da gerektirmektedir.

Tablo 1'e göre öğrencilerin tümü mükemmel (4 puan), yeterli (3 puan) ve kısmi başarı (2 puan) düzeylerinde Dijkstra algoritmasını uygulama performansı göstermişlerdir. Dört puan alan bir öğrenci yanıtı yukarıda Şekil 3'te verilmiştir. Puanlama anahtarına göre 3 ve 4 puan başarılı kabul edilmektedir. Dersin sonunda bireysel çözölen sorudan elde edilen puanlara göre öğrencilerin %87'si algoritmayı başarı ile uygulamışlardır. İki puan alan öğrencilerin çoğu, düğümlerin değerlerini doğru olarak belirlemişler ama rotaları oluşturamamışlardır.

Tablo 1. Öğrencilerin Sorular Bazında Puan Dağılımları

Puan	Frekans – İkinci Soru	Frekans – Değerlendirme Sorusu
4	11 (%73)	10 (%67)
3	1 (%7)	3 (%20)
2	3 (%20)	2 (%13)
1	0	0

Tablo 2. Öğrencilerin Problem Çözümü Puanları

Puan	Frekans – Model Oluşturma	Frekans – Rota Oluşturma
4	9 (%60)	8 (%53)
3	6 (%40)	2 (%13)
2	0	3 (%20)
1	0	2 (13)

Tablo 2'ye göre tüm öğrenciler başarılı bir şekilde matematiksel model oluşturabilmişlerdir. Öğrencilerin üçte ikisi problem bağlamında çizdikleri graf üzerinde Dijkstra algoritmasını başarılı bir şekilde uygulayıp rotaları oluşturmuşlardır. Örneğin Şekil 4'te yanıtı verilen öğrenci, algoritmayı genel olarak doğru uygulamış ancak Muğla-Denizli arasındaki rotayı çizmediği için 3 puan almıştır. Öğrencilerden üç tanesi algoritmayı kısmen başarı ile uygulamış, iki tanesi ise çok az başarı düzeyinde uygulamıştır. Bu öğrencilerden bir kısmı ikiye bölünmüş gruplar halinde çalışan öğrencilerden olabilir. Kendi kağıtlarına tüm çözümü yansıtamamış olabilirler. Bazı öğrenciler ise diğer sorulardaki modellere göre daha karmaşık bir modelde algoritmayı uygulamakta zorlanmış olabilirler.

Ölçme değerlendirme amacıyla son olarak, düşük puan (1 ve 2 puan) alan öğrencilerin çalışma kağıtları bu öğrencilerin hep aynı öğrenciler mi olduğunu belirlemek için tekrar incelenmiştir. Bu inceleme sonunda, hiçbir öğrencinin değerlendirilen üç sorunun hepsinden 1 veya 2 puan almadığı tespit edilmiştir. Mesela ikinci sorudan ve problemde 2 puan alan bir öğrenci değerlendirme sorusundan 3 puan almıştır. Bu bulgu bize her öğrencinin en az bir kez algoritmayı başarı ile uyguladığını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin yaptıkları hataların kolaylıkla giderilebileceğine işaret etmektedir çünkü öğrenciler sürekli olarak başarısızlık düzeyinde performans sergilememişlerdir.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, üstün yetenekli öğrencilerin Dijkstra algoritmasını uygulama performansları ve bu algoritmayı kullanmaları gereken bir problemi, matematiksel modelleme sürecini takip ederek nasıl çözdükleri incelenmiştir. Öğrencilerin genel olarak algoritmayı başarı ile uyguladıkları ve problem çözme sürecini de başarı ile tamamladıkları söylenebilir. Bu uygulamada tespit edilen hatalar (örneğin, dikkatsizlik hataları, düğümlerin değerini bulduğu halde rota çizmeme) dikkate alınarak gelecek uygulamalar planlanabilir. Özellikle rotaları çizmeme hatası, öğrencilerin algoritmanın çalışma prensibinde yolların takip edildiğini düşünmelerinden kaynaklanıyor olabilir (bkn.

Algoritmanın öğretilmesi kısmı). İleriki uygulamalarda bu duruma uygun olan ve ters düşen daha fazla örnek yapıp, algoritmanın çalışma prensibi net olarak anlaşılıp ondan sonra probleme geçilebilir.

İleride yapılacak uygulamalara başka bir öneri olarak, modelleme aşamasında öğrencilerden daha fazla yazılı açıklama yapmaları istenebilir. Örneğin, problemin verilenleri ve istenenleri yazılı olarak çalışma kağıdında belirtilebilir. Bulunan çözümün ne anlama geldiği de yazılı olarak açıklanabilir. Yazma etkinlikleri, öğrencilerin düşüncelerini organize etmelerine yardımcı olmakta ve matematiği öğrenmelerini desteklemektedir (Burns, 2004). Bir diğer öneri, problem çözme aşamasında öğrencilerin ikili gruplar oluşturarak çalışmalarınıdır. Daha sonra gruplar birbirlerinin kağıtlarını kontrol edebilirler ve sınıf içi matematiksel iletişim arttırılabilir.

KAYNAKLAR

- Apt, K. R. (2002). Edsger Wybe Dijkstra (1930 - 2002): A portrait of a genius. *Formal Aspects of Computing*, 14, 92-98.
- Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? *Acm Inroads*, 2(1), 48-54.
- Burns, M. (2004). Writing in math. *Educational Leadership*, 62(2), 30-33.
- Cevizci, B. (2018). How and why does the multiplication method developed by the Russian peasants work? *Journal of Inquiry Based Activities*, 8(1), 24-36. <http://www.ated.info.tr/index.php/ated/issue/view/15> adresinden erişildi.
- Doruk, B. K., & Umay, A. (2011). Matematiği günlük yaşama transfer etmede matematiksel modellemenin etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 124-135.
- Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., & Baş, S. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme: Temel kavramlar ve farklı yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(4), 1-21.
- Günlük yaşamda birçok uygulaması bulunan Dijkstra algoritması matematiğe dayanan bir bilgisayar algoritmasıdır. Bu makalede, bu algoritmanın kullanımını güncel bir problem bağlamında içeren bir etkinlik paylaşılmıştır. İleride yapılacak çalışmalarda bu ve benzeri etkinlikler örgün eğitim kurumlarında uygulanarak, öğrencilerin algoritmayı uygulama süreçleri incelenebilir.
- Teşekkür**
- Bu araştırma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu [TÜBİTAK] tarafından 1689B011716661 numaralı proje kapsamında desteklenmiştir. Bu makalede dile getirilen görüşler yazara ait olup TÜBİTAK'ın görüşlerini yansıtmamaktadır. Yazar, Ahmed Furkan Erbilgin'e projeye katkılarından dolayı teşekkür etmektedir.
- Finding the Shortest Path (2016, 5 Eylül). <http://www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Thompson/search.html> adresinden erişildi.
- Levitin, A. (2012). *Introduction to the design & analysis of algorithms* (3rd ed.). New Jersey: Addison-Wesley.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2016). Bilim ve sanat merkezleri yönergesi. *Tebliğler Dergisi*, 79(2710), 449-473. http://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_01/02031535_tebliğler_dergisi.pdf adresinden erişildi.
- Yıldız, A., Baltacı, S., Kurak, Y., & Güven, B. (2012). Üstün yetenekli ve üstün yetenekli olmayan 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme stratejilerini kullanma durumlarının incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(1), 123-143.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. W. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği: Gelişimsel yaklaşımla öğretim* (7. baskıdan çeviri) (Çev. S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayınları.

Kaynak Gösterme

Cevizci, B. (2018). Dijkstra algoritması ile en kısa rotanın hesaplanması. *Araştırma Temelli Etkinlik Dergisi*, 8(2), 70-85. <http://www.ated.info.tr/index.php/ated/issue/view/16> adresinden erişildi.

Ek 1

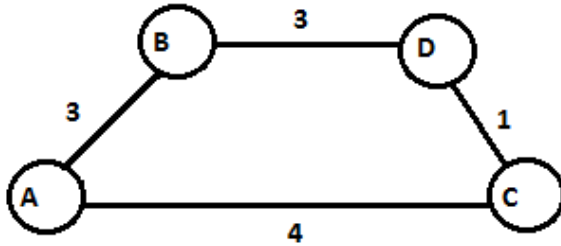
Çalışma Kağıdı

DİJKSTRA ALGORİTMASI**Dijkstra Algoritması**

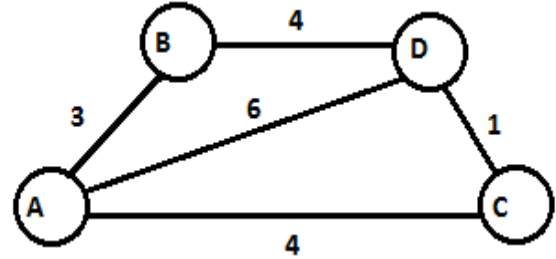
- 1) Başlangıç düğümüne 0 değerini veriniz. Bu düğümü gri renkle boyayınız. Değeri kesinleşen her düğüm gri rengi alacaktır.
- 2) Başlangıç düğümüne direk bağlanan düğümler, kendilerini başlangıç düğümüyle birleştiren kenarların değerini alırlar. En düşük değerli düğüm yeni başlangıç düğümü olur ve gri renge boyanır. Bu düğümün rotası da boyanır.
- 3) Yeni başlangıç düğümüne bağlantısı olan düğümler belirlenir. Gri renkli olanlar ihmal edilir. Bağlantılı düğümlerin değeri, yeni başlangıç düğümünün değerine, aradaki kenarın uzunluğu eklenerek bulunur. Rengi gri olmayan ve değeri en küçük olan düğüm yeni başlangıç düğümü olarak belirlenir.
- 4) Zaten değeri olan her hangi bir düğüm için, yeni bir değer oluşursa, küçük olan değer kabul edilir. Rota bu küçük sayıya göre çizilir. Bir düğümün rotası, değerini aldığı rota kullanılarak kesinleştirilir.
- 5) Tüm düğümler gri rengi alınca algoritma sonlanır.

1) Öğretmeninizle birlikte aşağıdaki 2 graf için A düğümünden başlayan ve diğer düğümlere giden en kısa rotaları belirleyiniz.

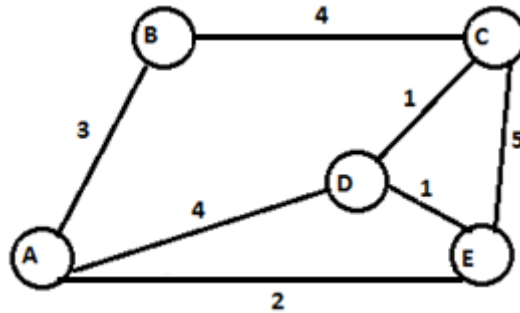
a)



b)



2) Aşağıdaki graf için A düğümünden başlayan ve diğer düğümlere giden en kısa rotaları belirleyiniz.

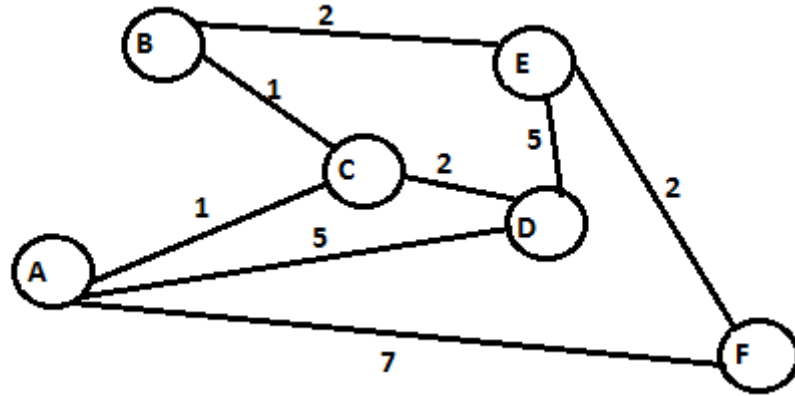


Problem: Kütahya, porseleni ile ünlü bir ilimizdir. Kütahya’da bulunan bir şirket, ürettiği porselen yemek takımlarını Ege Bölgesindeki diğer illere dağıtacaktır. Her ilin dağıtım kamyonu ayrıdır. Her bir kamyon için rota oluşturulması gerekmektedir. Kütahya’dan başlayan ve bölgedeki diğer yedi ile gitmekte kullanılabilecek en kısa mesafeli rotalar hangileridir? Model oluşturarak gösteriniz.

Problemi çözmek için aşağıdaki harita ve iller arası mesafelerden yararlanabilirsiniz.



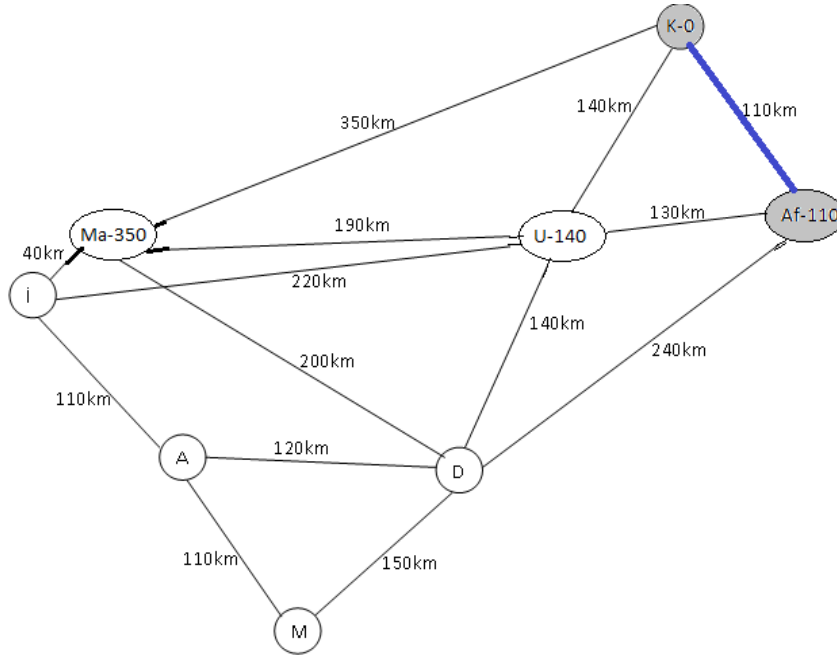
Değerlendirme sorusu: Aşağıdaki graf için A düğümünden başlayan ve diğer düğümlere giden en kısa rotaları belirleyiniz.



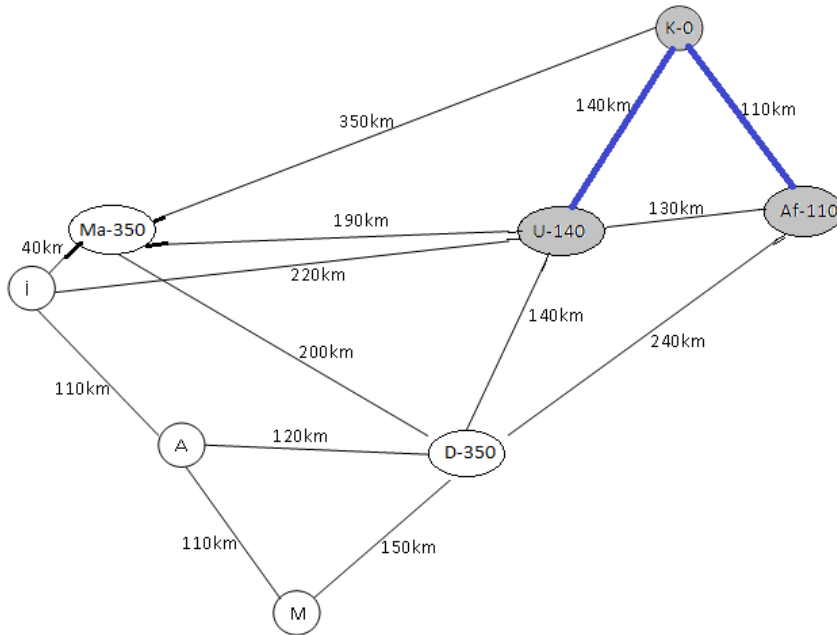
Ek 2

Problemin Çözümünde Dijkstra Algoritmasının Uygulanması

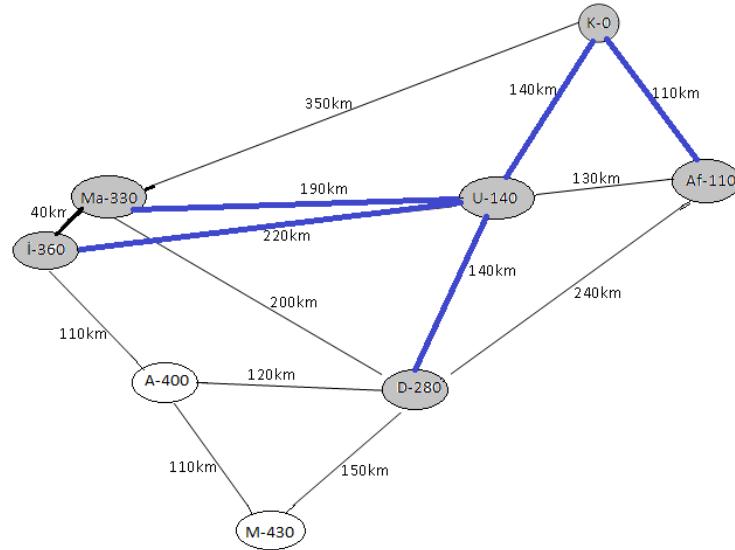
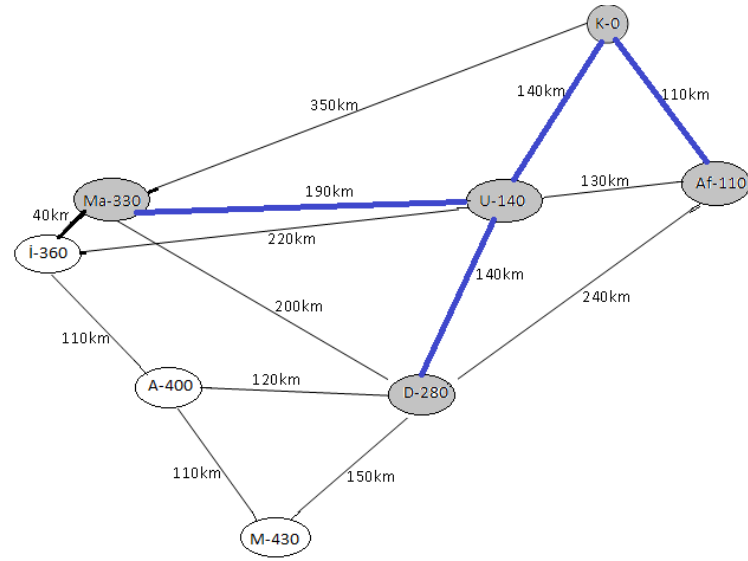
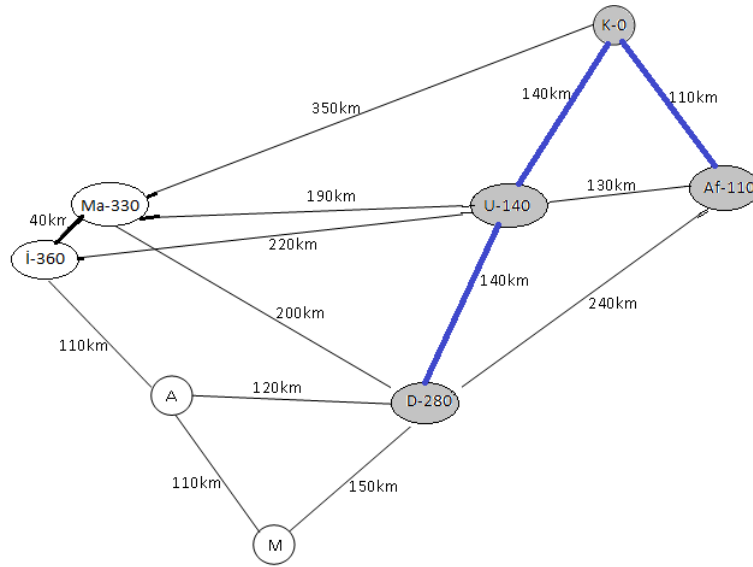
K (Kütahya) başlangıç düğümüdür, değeri sıfırdır. Komşu düğümler incelenerek bir sonraki başlangıç düğümü Af (Afyon) olarak belirlenir:

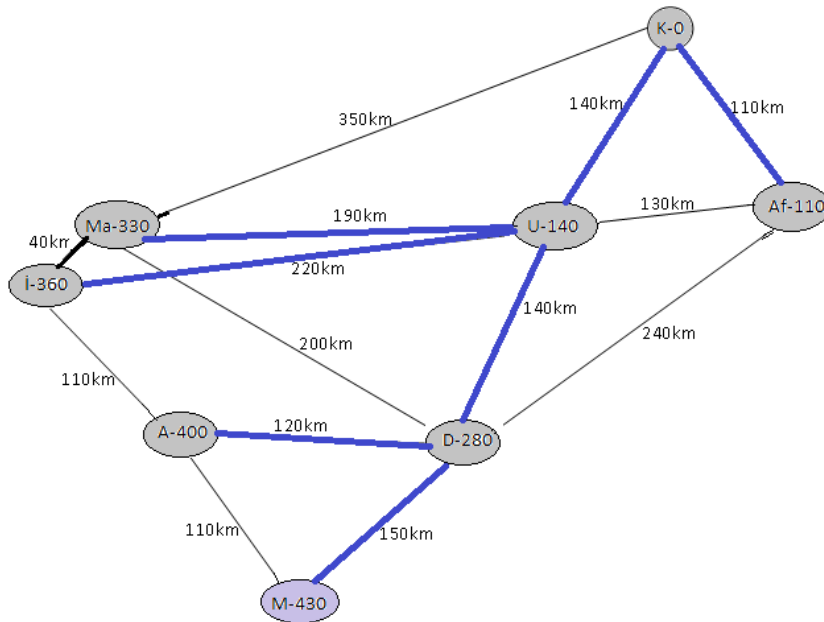
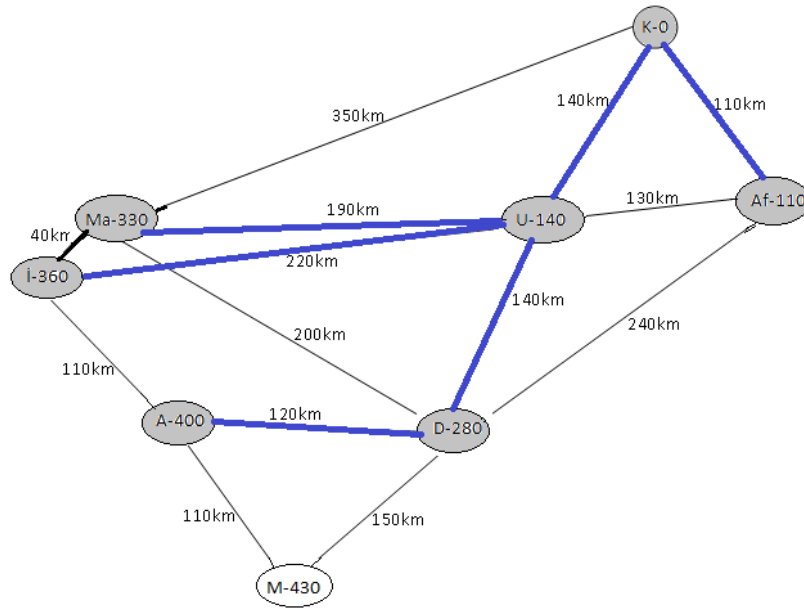


Af düğümüne komşu olan düğümlerin değerleri algoritmaya uygun olarak belirlenir. Değer almış düğümler içinde en küçük değerli düğüm olan U (Uşak) düğümü yeni başlangıç düğümüdür, değerini K'dan gelerek edindiği için rota K'dan çizilir:



Algoritma uygulanınca sırasıyla aşağıdaki şekiller elde edilir:





Tüm düğümler gri rengi aldığı için algoritma sonlanmıştır. Son graftaki mavi rotalar, Kütahya'dan diğer yedi ile giden en kısa rotaları vermektedir.

Ek 3

Dijkstra Algoritmasının Uygulanmasını Ölçmek için Puanlama Anahtarı

Başarılı		Henüz Değil	
4 Puan: Mükemmel	3 Puan: Yeterli	2 Puan: Kısmi Başarı	1 Puan: Çok Az Başarı
Algoritma doğru bir şekilde uygulanmış ve başlangıç düğümünden diğer düğümlere gitmekte kullanılabilecek en kısa rotalar belirlenmiştir.	Algoritma doğru bir şekilde uygulanmış ancak dikkatsizlik veya basit işlem hatası yüzünden başlangıç düğümünden diğer düğümlere gitmekte kullanılabilecek en kısa rotaların tümü belirlenememiş olmakla birlikte bu rotaların yarısından fazlası belirlenmiştir.	Algoritmanın tam olarak öğrenildiğini belirleyecek adımlar takip edilmediği için başlangıç düğümünden diğer düğümlere gitmekte kullanılabilecek en kısa rotaların yarısından fazlası oluşturulmamıştır. Veya algoritmanın kısmen öğrenildiğine işaret olarak düğümlerin değeri doğru hesaplanmıştır ancak rotalar çizilmemiştir.	Algoritmanın ya çok az bir kısmı uygulanmış ya da algoritma tamamen yanlış uygulanmıştır.
Soru kapsamında bir model oluşturulması gerekiyorsa, bağlamı temsil eden bir graf, düğümler ve kenarlar kullanılarak doğru bir şekilde oluşturulmuştur. Tüm kenarların değerleri modelde gösterilmiştir.	Soru kapsamında bir model oluşturulması gerekiyorsa, bağlamı temsil eden bir graf, düğümler ve kenarlar kullanılarak oluşturulmuştur. Ancak graf oluştururken bir veya iki düğüm/kenar eksik/hatalı oluşturulmuştur ve/veya kenarlardan bir kısmının değeri yazılmamıştır.	Soru kapsamında bir model oluşturulması gerekiyorsa, bağlamla ilgili bir graf oluşturulmuştur ancak yapılan hatalardan dolayı graf, bağlamı temsil etmekte yetersizdir.	Soru kapsamında bir model oluşturulması gerekiyorsa, bağlamı temsil etmeyen bir model oluşturulmuş veya hiç model oluşturulmamıştır.